

Baccalauréat Professionnel Technicien Géomètre Topographe

2023



Formulaire d'aide à la résolution
des problèmes de calcul topométrique

Sommaire

0	Conventions	p. 3
1	Triangle quelconque	p. 4
2	Triangles semblables	p. 4
3	Triangle rectangle	p. 5
4	Trapèze	p. 5
5	Polygone de n côtés	p. 5
6	Raccordements circulaires	p. 6
7	Secteur circulaire	p. 6
8	Transformations de coordonnées	p. 7
9	Intersection de deux droites	p. 7
10	Intersection de deux cercles	p. 8
11	Intersection droite - cercle	p. 8
12	Nivellement indirect	p. 9
13	Corrections des distances	p. 9-10
14	Correction de niveau apparent	p. 10
15	Moyenne arithmétique, moyenne pondérée	p. 10
16	Le G0 (ou V0)	p. 11
17	Relèvement sur 3 points - <i>méthode du barycentre</i> -	p. 12
18	Relèvement sur 3 points - <i>méthode de Delambre</i> -	p. 12
19	Changement de base	p. 13
20	Tolérances : Classes de précision	p. 14-15

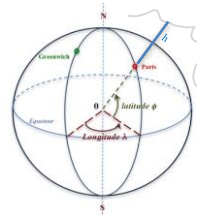
Conventions relatives aux travaux topographiques

Unités en vigueur :

- distance en mètre (**m**)
- angle en grades (**gon**)

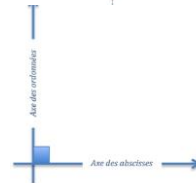
Systèmes de coordonnées géographiques

- longitude : λ
- latitude : Φ
- hauteur sur l'ellipsoïde : **h** (ou **he**)

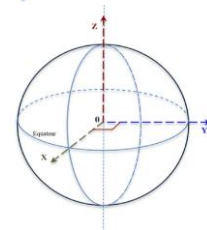


Systèmes de coordonnées planimétriques

- Coordonnées locales : **x, y**
- Coordonnées Lambert 93 : **e, n**
- Coordonnées RGF 93 CC (9 zones) : **E, N**



Systèmes de coordonnées géocentriques : **X, Y, Z**



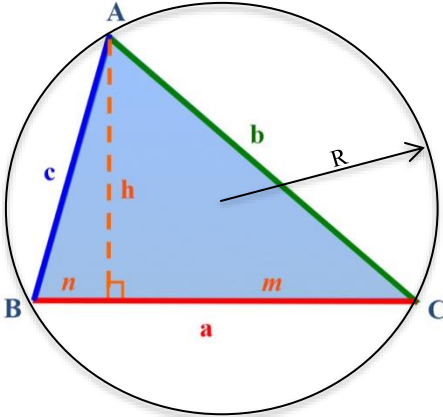
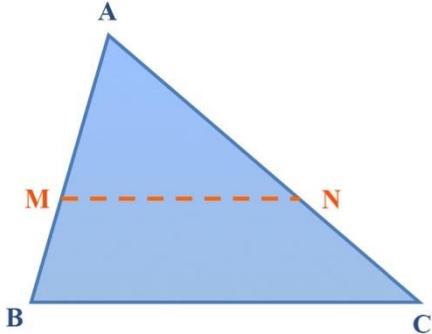
Systèmes de coordonnées altimétrique : altitude normale / au géoïde :

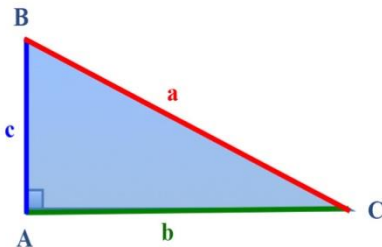
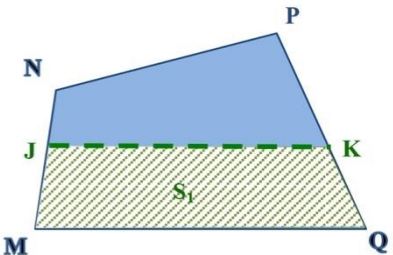
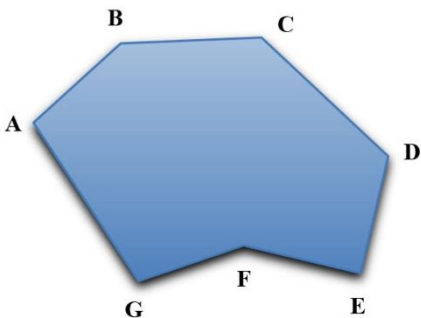
- **NGF-IGN 69** (NGF-IGN78 pour la Corse) : **H**

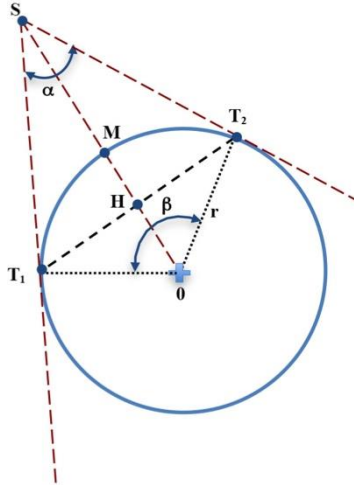
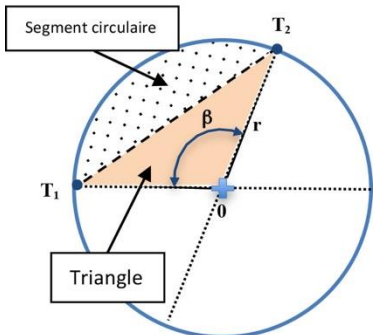
Rayon moyen de la terre : $R_{\text{moyen}} = 6\,373\,000\text{ m}$ (6373 km)

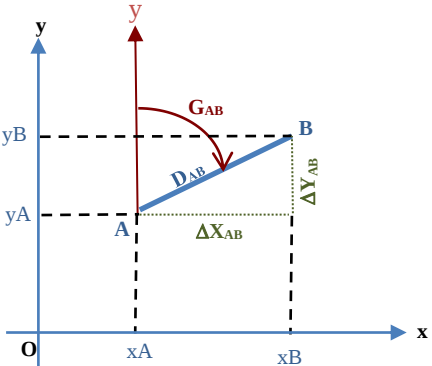
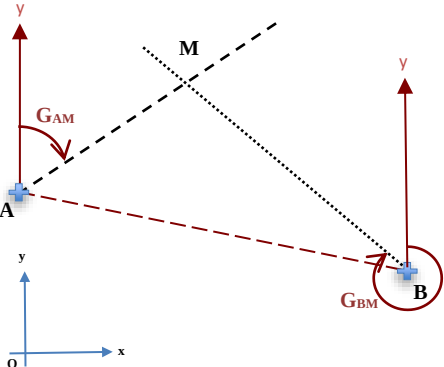
Terminologie usitée :

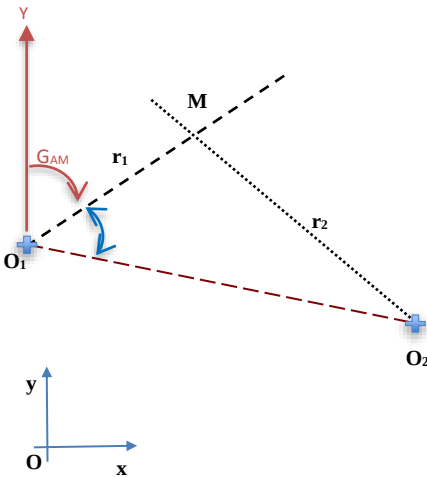
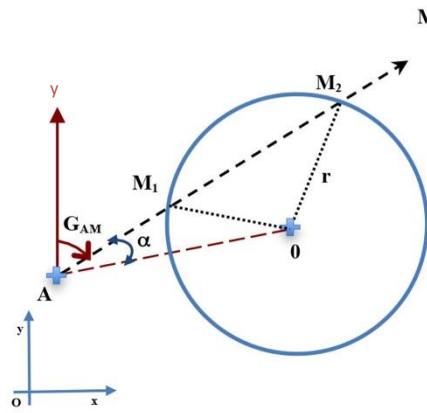
- **ht** = hauteur des tourillons (ou **hi** = hauteur d'instrument)
- **hp** = hauteur de prisme (ou **hr** = hauteur de réflecteur ou **hv** = hauteur de voyant)
- **Δhi** ou **dni** = dénivelée instrumentale

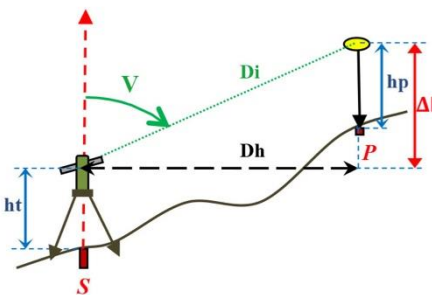
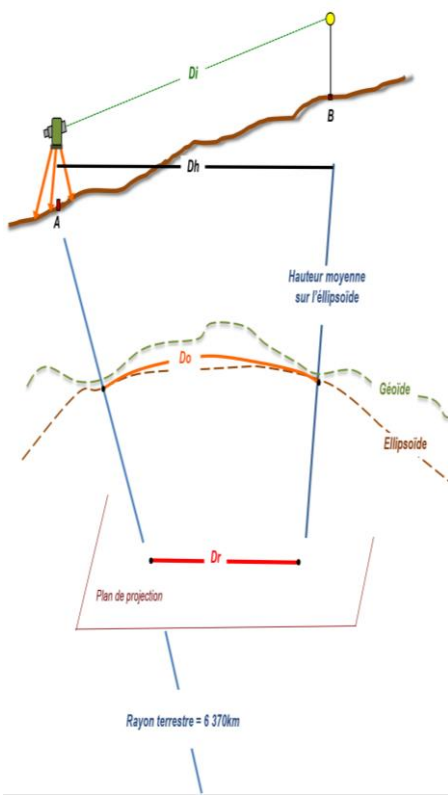
croquis - schémas	formules
1-Triangle quelconque 	Relation des sinus $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ Relation des cosinus $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C$ Superficie $S = (a \cdot b \cdot \sin C) / 2$ $S = (a \cdot c \cdot \sin B) / 2$ $S = (b \cdot c \cdot \sin A) / 2$ $S = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \cdot \sin A}$ avec $p = \frac{1}{2}$ périmètre $S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$ $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b) \cdot (p - c)}{p \cdot (p - a)}}$ $n = (c^2 + a^2 - b^2) / 2a$ $h^2 = c^2 - n^2 = b^2 - m^2$
2-Triangles semblables 	Théorème de Thalès $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = k$ $S_{AMN} = S_{ABC} \cdot k^2$

croquis - schémas	formules
3-Triangle rectangle 	$\sin B = \text{côté opposé} / \text{hypoténuse} = b/a$ $\cos B = \text{côté adjacent} / \text{hypoténuse} = c/a$ $\tan B = \text{côté opposé} / \text{côté adjacent} = b/c$ $BA^2 + AC^2 = BC^2$ Superficie $S = \frac{1}{2} \cdot (b \cdot c)$
4-Trapèze 	$S_1 = \text{superficie MJKQ}$ $JK^2 = MQ^2 - 2S_1 \cdot \left(\frac{1}{\tan Q} + \frac{1}{\tan M} \right)$ $QK = \frac{2S_1}{(MQ + JK) \cdot \sin Q}$ $JM = \frac{2S_1}{(MQ + JK) \cdot \sin M}$
5-Polygone de n cotés 	Somme des angles intérieurs $\Sigma = (n - 2) \cdot 200$ Somme des angles extérieurs $\Sigma = (n + 2) \cdot 200$ Superficie $2S = \sum_{i=n}^{i=1} [x_i \cdot (y_{(i+1)} - y_{(i-1)})]$ $2S = \sum_{i=n}^{i=1} [y_i \cdot (x_{(i+1)} - x_{(i-1)})]$

croquis - schémas	formules
6-Raccordements circulaires 	Périmètre du cercle = $2.\pi. r$ Superficie du disque = $\pi.r^2$ Longueur de la corde $T_1T_2 = 2.r. \sin \frac{\beta}{2}$ Longueur de l'arc = $T_1T_2 = \frac{2.\pi.r.\beta}{400}$ Longueur de la flèche $MH = r - [r. \cos \frac{\beta}{2}]$ Longueur du segment de la tangente $ST_1 = ST_2 = r. \tan \frac{\beta}{2}$
7-Secteur circulaire : superficies 	Triangle : $S = \frac{1}{2} . r^2 . \sin \beta$ Secteur : $S = \frac{\pi.r^2.\beta}{400}$ Segment : $S_{\text{Secteur}} - S_{\text{triangle}}$

croquis - schémas	formules
8-Transformations de coordonnées 	Distance AB : $x_B - x_A = \Delta x = D_{AB} \cdot \sin G_{AB}$ $y_B - y_A = \Delta y = D_{AB} \cdot \cos G_{AB}$ $D_{AB} = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$ Gisement AB: $\tan G' = (x_B - x_A) / (y_B - y_A)$ $\tan G' = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ on obtient G' avec son signe si $\Delta x \geq 0$ et $\Delta y \geq 0 \rightarrow G_{AB} = G'$ si $\Delta x \geq 0$ et $\Delta y \leq 0 \rightarrow G_{AB} = G' + 200$ si $\Delta x \leq 0$ et $\Delta y \leq 0 \rightarrow G_{AB} = G' + 200$ si $\Delta x \leq 0$ et $\Delta y \geq 0 \rightarrow G_{AB} = G' + 400$
9-Intersection de deux droites 	1ère méthode : (résolution du triangle AMB) G_{AB} et D_{AB} par (x, y) angle A = $G_{AB} - G_{AM}$ angle B = $G_{BM} - G_{BA}$ D_{AM} et D_{BM} Calcul des (x, y) de M depuis A Contrôle : (x, y) de M depuis B 2ème méthode : (formule de Delambre) depuis A $y_M = y_A + \frac{(x_A - x_B) - (y_A - y_B) \cdot \tan G_{BM}}{\tan G_{BM} - \tan G_{AM}}$ $x_M = x_A + (y_M - y_A) \cdot \tan G_{AM}$ Contrôle : idem depuis B

croquis - schémas	formules
10-Intersection de deux cercles 	calcul de G_{O1-O2} et D_{O1-O2} par (x,y) résolution du triangle O_1O_2M calcul de G_{O1-M} Calcul des (x,y) de M depuis O_1 Contrôle : calcul de G_{O2-M} Calcul des (x,y) de M depuis O_2
11-Intersection droite – cercle 	G_{AO} et D_{AO} par (x,y) résolution du triangle AOM_1 $OM_1 = r = \text{rayon}$ Calcul de l'angle A, de l'angle M_1, de l'angle O Distance AM_1 Gisement AM_1 Calcul des (x,y) de M_1 depuis A Contrôle : Calcul des (x,y) de M_1 depuis O idem pour le triangle AOM_2

croquis - schémas	formules
12-Nivellement indirect 	Distance horizontale D_h : $D_h = \sqrt{D_i^2 - \Delta h_i^2}$ $D_h = D_i \cdot \sin V$ Dénivelée instrumentale Δh_i : $\Delta h_i = D_i \cdot \cos V$ $\Delta h_i = D_h / \tan V$ Altitude H : $H_p = H_s + h_t + \Delta h_i - h_p$ $H_s = H_p + h_p - \Delta h_i - h_t$
13- Corrections des distances 	Pour obtenir une distance, il conviendra d'apporter aux mesures de longueurs les corrections suivantes : 1- constante de prisme (donnée constructeur) 2- correction atmosphérique - Ca - obtenue par lecture sur un abaque (saisie sur le terrain au moment des mesures) 3- réduction à l'horizontale $D_h = D_i \cdot \sin V$ 4- correction de réduction à l'ellipsoïde - Co - ou C_{ellipsoïde} - $Co = - \frac{D_h \cdot h}{R + h}$ 5- correction de représentation plane ou de projection - Cr ou Cp - <i>cette correction varie en fonction de la situation géographique du chantier, elle est obtenue avec « CIRCE ».</i>

formules

Transformer une Dh en Dr (distance réduite à la projection)

Coefficients de réduction et module

- Coefficient de réduction à l'ellipsoïde:

$$k_{\text{ellipsoïde}} = -1000 \cdot \frac{hm}{(Rm + hm)}$$

- Coefficient d'altération linéaire :

kr obtenu à l'aide du logiciel CIRCE (en mm/Km)

hm = hauteur moyenne au-dessus de l'ellipsoïde

Rm = rayon moyen de la terre (6373 km)

avec, *Rm* et *hm* en *m*, et *k_{ellipsoïde}* et *kr* en *m/km*

Module m (avec 6 décimales)

$$m = 1 + \frac{k_{\text{ellipsoïde}} + kr}{1000}$$

Distance réduite à la projection

$$Dr = Dh \cdot m$$

Dr et *Dh* en mètre

Rapport d'échelle m (avec 6 décimales)

$$m = Dr / Dh$$

14- Correction de niveau apparent

Pour des portées supérieures à 300m, il est nécessaire de prendre en compte deux erreurs systématiques :

- l'erreur due à la sphéricité de la terrestre
- l'erreur due à la réfraction atmosphérique.

Ces erreurs de sphéricité et de réfraction sont généralement associées en une seule erreur nommée **erreur de niveau apparent**.

La correction globale est appelée correction de niveau apparent **Cna**.

Cette correction est à ajouter à la dénivelée.

expression simplifiée : $Cna = \frac{Dh^2}{15,2}$

Avec *Cna* en mètre, et *Dh* en km

15- Calcul d'une moyenne de plusieurs valeurs

Moyenne arithmétique :

$$\text{Moyenne des valeurs} = \frac{\text{valeur 1} + \text{valeur 2} + \dots + \text{valeur n}}{n}$$

avec : *n* = nombre de valeurs prises en compte

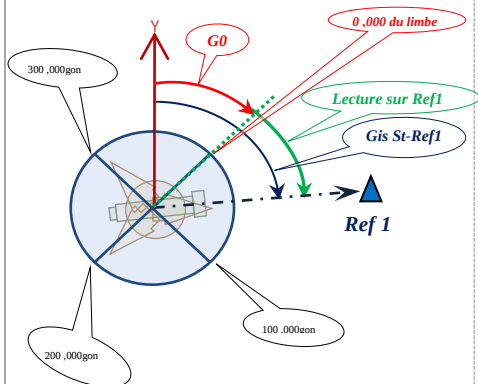
Moyenne pondérée :

$$\text{Moyenne des valeurs} = \frac{\sum Vi \cdot pi}{\sum pi}$$

avec : *V* = valeur (longueur, angle, etc.)
pi = poids attribué à la valeur *i*

croquis - schémas

16- le G0 (ou V0):

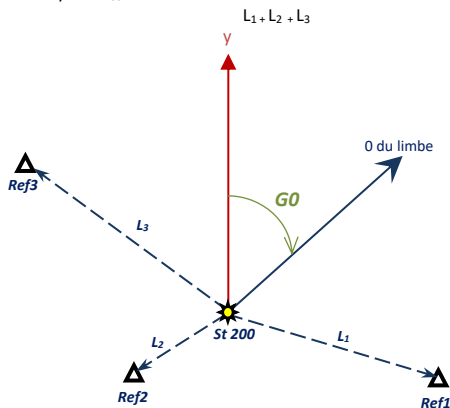


Moyenne arithmétique (exemple pour 3 visées) :

$$Go_{St200} = \frac{GO_{St200-Ref1} + GO_{St200-Ref2} + GO_{St200-Ref3}}{3}$$

Moyenne pondérée :

$$Go_{moyen St200} = \frac{(GO_{St-Ref1} \cdot L_1) + (GO_{St-Ref2} \cdot L_2) + (GO_{St-Ref3} \cdot L_3)}{L_1 + L_2 + L_3}$$



formules

Le **G0** (ou **V0**) d'une station est le gisement du zéro du limbe de l'appareil : gisement de la droite passant par le centre du limbe et la graduation « zéro » de ce limbe.

$$GO_{station} = Gis_{St-Ref1} - \text{lecture sur Ref1}$$

Le Go moyen

Pour obtenir une précision satisfaisante de l'orientation de la station (et la contrôler !) plusieurs références connues en coordonnées sont visées. Il faut alors calculer un **G0 moyen** à partir des différents G0 obtenus.

Deux méthodes sont alors possibles :

a - **Go moyen par moyenne arithmétique** : si les visées sont sensiblement d'égales longueurs.

$$GO_{moyen St} = \frac{\sum GO_{St-Ref i}}{n}$$

avec **n** = nb de visées

b - **Go moyen par moyenne pondérée** : si les visées sont d'inégales longueurs

La pondération est alors proportionnelle à la longueur de chaque visée.

Remarque : plus une visée est longue plus son orientation angulaire est précise.

$$GO_{moyen St} = \frac{\sum (GO_{St-i} \cdot Li)}{\sum Li}$$

avec :

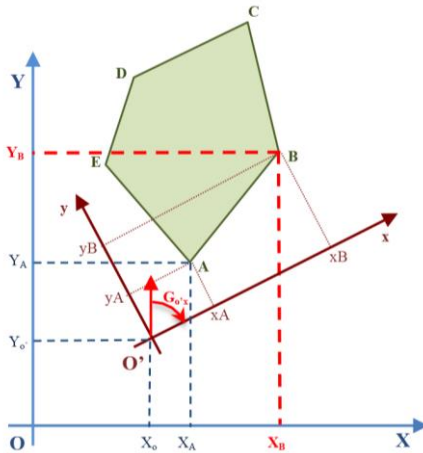
GO_{St-i} = différents G0 calculés depuis la station
Li = longueur de chaque visée

croquis - schémas	formules
17-Relèvement sur 3 points : méthode du barycentre	S est inconnu et stationné A, B et C sont trois points connus $\alpha + \beta + \gamma = 400 \text{ gon}$ et $A + B + C = 200 \text{ gon}$ $ma = \frac{1}{(\cotan A - \cotan \alpha)}$ $mb = \frac{1}{(\cotan B - \cotan \beta)}$ $mc = \frac{1}{(\cotan C - \cotan \gamma)}$ $x_S = \frac{ma \cdot x_A + mb \cdot x_B + mc \cdot x_C}{ma + mb + mc}$ $y_S = \frac{ma \cdot y_A + mb \cdot y_B + mc \cdot y_C}{ma + mb + mc}$
18-Relèvement sur 3 points : méthode de Delambre	M est inconnu et stationné A, B et C sont trois points connus $\tan G_{AM} = \frac{\left[\left(\frac{x_A - x_B}{\tan \alpha} \right) - \left(\frac{x_A - x_C}{\tan \beta} \right) + (y_B - y_C) \right]}{\left[\left(\frac{y_A - y_B}{\tan \alpha} \right) - \left(\frac{y_A - y_C}{\tan \beta} \right) - (x_B - x_C) \right]}$ $G_{BM} = G_{AM} + \alpha$ $y_M = y_A + \frac{[(x_A - x_B) - (y_A - y_B) \cdot \tan G_{BM}]}{(\tan G_{BM} - \tan G_{AM})}$ $x_M = x_A + (y_M - y_A) \cdot \tan G_{AM}$

croquis - schémas

19- Changement de base :

passer d'un système initial à un système final



-sur le schéma, XOY représente un système orthonormé plan-

Avec sur le schéma :

$xO'y$ = système *initial*

XOY = système **final**

x_A et y_A = coordonnées dans le système *initial*

X_A et Y_A = coordonnées dans le système **final**

GAB = gisement dans le système **final**

gAB = gisement dans le système *initial*

formules

Eléments connus :

- Les coordonnées x et y des points A et B sont connues dans le système initial.

- Les coordonnées X et Y des points o' et A sont connues dans le système final.

- Avec le **gisement de l'axe $o'x$ connu** dans le système général : **$Go'x = GAB - gAB + 100$**

Eléments cherchés :

$$XB = XA + \Delta x \cdot \sin Go'x - \Delta y \cdot \cos Go'x$$

$$YB = YA + \Delta x \cdot \cos Go'x + \Delta y \cdot \sin Go'x$$

Soit pour un cas général

$$X_n = X_{n-1} + \Delta x \cdot \sin Go'x - \Delta y \cdot \cos Go'x$$

$$Y_n = Y_{n-1} + \Delta x \cdot \cos Go'x + \Delta y \cdot \sin Go'x$$

avec $\Delta x = x_n - x_{n-1}$ et $\Delta y = y_n - y_{n-1}$

- Avec le **gisement de l'axe $o'y$ connu** dans le système final : **$Go'y = GAB - gAB$**

$$X_n = X_{n-1} + \Delta x \cdot \cos Go'y + \Delta y \cdot \sin Go'y$$

$$Y_n = Y_{n-1} + \Delta y \cdot \cos Go'y - \Delta x \cdot \sin Go'y$$

20- Les Tolérances : Classes de précision (modèle standard)

arrêté 2003, modifié 2006

Pour tout échantillon comportant N objets géographiques, on calcule l'écart moyen en position $E_{\text{moy pos}}$

Celui-ci est défini par la moyenne arithmétique des écarts en position E_{pos} relevés sur les points des objets géographiques.

On dit que la population dont est issu l'échantillon comportant N éléments est de classe de précision $[xx]$ cm lorsque simultanément les **trois conditions a, b, et c** sont remplies :

a/ l'écart moyen en position de l'échantillon est inférieur à T

$$E_{\text{moy pos}} \leq T \quad \text{avec} \quad T = [xx] \times \left(1 + \frac{1}{2 \times C^2}\right) \text{ cm}$$

C = coefficient de sécurité des mesures de contrôle donnée par le cahier des charges (*usuellement* $C=2$)

b/ le nombre N' d'écarts dépassant le premier seuil $T_1 = k \times [xx] \times \left(1 + \frac{1}{2 \times C^2}\right)$ n'excède pas l'entier immédiatement supérieur à $0,01 \times N + 0,232 \times \sqrt{N}$

k = valeur indiquée dans la **Table 1** en fonction du nombre n de coordonnées caractérisant la position des objets géographiques.

Table 1 : valeurs du coefficient k en fonction du nombre n de coordonnées caractérisant la position des objets géographiques considérés et suivant la même loi statistique.

n	1	2	3
k	3.23	2.42	2.11

c/ aucun écart en position E_{pos} dans l'échantillon n'excède le second seuil

$$T_2 = 1,5 \times k \times [xx] \times \left(1 + \frac{1}{2 \times C^2}\right) \text{ cm}$$

ou $T_2 = 1,5 \times T_1 \text{ cm}$

Lorsque $N < 5$, aucun écart supérieur à T_2 n'est admis (voir **Table 2**)

Table 2 : Nombre d'écarts acceptés

N (nombre d'éléments de l'échantillon)	1	5	14	45	86	133	185	241	299	360	423
	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à
	4	13	44	85	132	184	240	298	359	422	487
N'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Selon les catégories de plans planimétriques et altimétriques, il est possible d'indiquer de façon approximative, les **classes de précision** suivantes relatives aux levés de détail et aux vérifications des plans :

Échelle du plan	Nature du plan	Catégorie planimétrique	Classe de précision (cm)
Toutes échelles	numérique	P1	2
1/200	régulier	P2	4
1/500	régulier	P3	10
1/1000	régulier	P4	20
1/2000	régulier	P5	40
1/5000	régulier	P6	100
Toutes échelles	expédié	P7	> 100

Catégorie altimétrique	Classe de précision (cm)
A1	1
A2	2
A3	4
A4	10
A5	20
A6	> 20